Comprobar las siguientes fórmulas de integración y usar dicho procedimiento para calcular las integrales dadas (la fórmula marcada con (*) se reduce a fracciones simples, y éstas todavía no las hemos visto; una vez que llegue a la integral pedida, puede dejarla así y resolverla más adelante):

$$\int \operatorname{sen}^m x\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int (1-\cos^2 x)^k (\operatorname{sen} x\,dx) & , \quad m = 2k+1 \\ \displaystyle\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k dx & , \quad m = 2k \end{cases}$$

$$\int \cos^n x\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int (1-\operatorname{sen}^2 x)^k (\cos x\,dx) & , \quad n = 2k+1 \\ \displaystyle\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k dx & , \quad n = 2k \end{cases}$$

$$\int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^m x}\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)^k}{\operatorname{sen}^m x}(\cos x\,dx) & , \quad m \in \mathbb{Z},\; n = 2k+1 \\ \displaystyle\int \frac{(1+\tan^2 x)^{k-k'-1}}{\tan^{2k} x}(\sec^2 x\,dx) & , \quad m = 2k,\; n = 2k' \\ \displaystyle\int \frac{(\sec^2 x)^{k-k'}}{(\sec^2 x - 1)^{k+1}}(\sec x \tan x\,dx) & , \quad m = 2k,\; n = 2k'+1 \; (*) \end{cases}$$

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \sqrt[3]{\cos x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \tan^5 x\,dx$

(e) $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}\right)\cos^6(\mathrm{e}^x + \lg n\, x)\,dx$

(f) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^3\left(\frac{x^2}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^8 x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(x+\pi/4)}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\cos^3(x^3+3x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^3+3x)}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 2x\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{(x+1)\cos^3(2x^2+4x)}{\operatorname{sen}^2(x^2+2x)}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{\cos^{n-1}\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\operatorname{sen}^{n+1}\left(\frac{x-a}{2}\right)}\,dx$ (*Sugerencia*: haga el cambio $u = \dfrac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}$)

125. Con el mismo ánimo del ejercicio anterior, pero ahora resolvemos las integrales

$$I_1 = \int \tan^m x\,dx\;, \quad I_2 = \int \sec^n x\,dx\;, \quad I_3 = \int \tan^m x \sec^n x\,dx\;.$$

Comprobar las siguientes fórmulas de integración y usar dicho procedimiento para calcular las integrales dadas (el mismo comentario para las integrales marcadas con (*)):

$$\int \tan^m x\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int (\sec^2 x - 1)^k\,dx & , \quad m = 2k \\ \displaystyle\int \frac{(\sec^2 x - 1)^k}{\sec x}(\sec x \tan x\,dx) & , \quad m = 2k+1 \end{cases}$$

$$\int \sec^n x\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int (\tan^2 x + 1)^{k-1}(\sec^2 x\,dx) & , \quad n = 2k \\ \displaystyle\int \frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^{k+1}}\,dx & , \quad n = 2k+1 \; (*) \end{cases}$$

$$\int \tan^m x \sec^n x\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int \tan^{2k} x (\tan^2 x + 1)^{k'-1}(\sec^2 x\,dx) & , \quad m = 2k,\; n = 2k' \\ \displaystyle\int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{2k'}(\sec x \tan x\,dx) & , \quad m = 2k+1,\; n = 2k'+1 \\ \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{2k} x}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^{k+k'}}(\cos x\,dx) & , \quad m = 2k,\; n = 2k'+1 \; (*) \end{cases}$$

(a) $\displaystyle\int \sec^2 x \tan^2 x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\tan^4(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{-x}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \tan^3(x/4)\,dx$

(d) $\displaystyle\int \sec^3 x \tan x\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$ (*Sugerencia*: $\dfrac{4}{(1-u^2)^2} = \dfrac{1}{1-u} + \dfrac{1}{(1-u)^2} + \dfrac{1}{1+u} + \dfrac{1}{(1+u)^2}$)

(f) $\int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen}^3 x}$ (*Sugerencia*: dividir arriba y abajo por $\cos^4 x$)

(g) $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\csc^4 x}\, dx$

(h) $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$

(i) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos 2x}$

(j) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x \cos^5 x}}$

(k) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\operatorname{sen} x \cos x}\, dx$

(l) $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$

(m) $\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{14} x}}\, dx$

126. Resolver las siguientes integrales por el método de sustitución trigonométrica, usando cualquiera de los cambios de variable de la tabla adjunta ($R(u)$ designa una función racional en la variable u):

Tipo de integral:	Hacer:	Tipo de integral:	Hacer:
$\int R(a^2 - x^2)\, dx$	$x = a \operatorname{sen} \theta$	$\int R(\sqrt{x}, \sqrt{a^2 - x})\, dx$	$x = a \operatorname{sen}^2 \theta$
$\int R(a^2 + x^2)\, dx$	$x = a \tan \theta$	$\int R(\sqrt{x}, \sqrt{a^2 + x})\, dx$	$x = a \tan^2 \theta$
$\int R(x^2 - a^2)\, dx$	$x = a \sec \theta$	$\int R(\sqrt{x}, \sqrt{x - a^2})\, dx$	$x = a \sec^2 \theta$

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$

(b) $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^4}\, dx$

(c) $\int \frac{\sqrt{(1 + x^2)^5}}{x^6}\, dx$

(d) $\int \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}\, dx$

(e) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(1 + x)^3}}$

(f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

(g) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

(h) $\int \frac{\sqrt{x - 4x^2}}{x}\, dx$

(i) $\int \frac{dx}{(x + \sqrt{x + x^2})(1 + x)}$

(j) $\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x^4 + x^2 - 2}}\, dx$

(k) $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{(4x^2 - 2x + 1)^3}}\, dx$

(l) $\int \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx$

(m) $\int \frac{8x - 11}{\sqrt{5 + 2x - x^2}}\, dx$

(n) $\int \frac{1 - x + x^2}{\sqrt{1 + x - x^2}}\, dx$

(o) $\int x\sqrt{x^2 + 4x + 13}\, dx$

127. Demostrar las fórmulas trigonométricas

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \ , \\ 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \ , \\ 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta &= \operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \ , \end{aligned}$$

y con este resultado, evaluar las siguientes integrales:

(a) $\int \operatorname{sen} 5x \cos x\, dx$

(b) $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x + a) \operatorname{sen}(x + b)\, dx$

(c) $\int \cos^2 ax \cos^2 bx\, dx$

128. Las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, donde R es una función racional en las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, se resuelven por medio del importante cambio de variable $u = \tan(x/2)$. Las identidades siguientes proporcionan las fórmulas necesarias para usar este cambio, reduciéndo la integral dada en una fracción cuadrática:

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{\sec^2(x/2)} = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \qquad x = 2 \arctan u \ , \ \forall\ x \in (-\pi, \pi)$$

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan(x/2)}{\sec^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{2u}{1 + u^2} \qquad dx = \frac{2}{1 + u^2} du$$

Con este cambio, resolver las siguientes integrales (con esto, suelen aparecer fracciones simples; a menos que sea muy sencilla la fracción resultante, puede dejar el resultado pendiente para cuando veamos este método):

(a) $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$

(b) $\int \frac{2 - \operatorname{sen} x}{2 + \cos x}\, dx$

(c) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\operatorname{sen}x}$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x+2\operatorname{sen}x+3}$ (h) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen}x+\cos x}{1+\operatorname{sen}x-\cos x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{8-4\operatorname{sen}x+7\cos x}$ (g) $\displaystyle\int \frac{dx}{5-4\operatorname{sen}x+3\cos x}$ (i) $\displaystyle\int \frac{dx}{a\operatorname{sen}x+b\cos x}\,dx$

(j) Resolver la integral $\displaystyle\int \frac{\tan x-1}{\tan x+1}dx$ de tres modos:

i. Haciendo el cambio $u=\tan x$; puede quedar una sencilla integral por fracciones simples.

ii. Reescribiendo $\tan x$ en función de $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$.

iii. Notando que $\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1}=\dfrac{\tan x-\tan(\pi/4)}{1+\tan x\tan(\pi/4)}$ y recordando una fórmula notable.

¿Porqué estos tres resultados son *aparentemente* diferentes? ¿Se está contradiciendo el T.F.C.?

129. *Sean a,b,c,d constantes dadas, tales que $ad-bc\neq 0$. Demostrar que $\exists\ A,B,C$ con la propiedad de que

$$\int \frac{a\operatorname{sen}x+b\cos x}{c\operatorname{sen}x+d\cos x}=Ax+B\operatorname{lgn}\mid c\operatorname{sen}x+d\cos x\mid +C$$

(*Sugerencia*: elegir A,B tales que $a\operatorname{sen}x+b\cos x\equiv A(c\operatorname{sen}x+d\cos x)+B(c\cos x-d\operatorname{sen}x)$). Usar este resultado para resolver las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\operatorname{sen}x+2\cos x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{3\operatorname{sen}x+2\cos x}{2\operatorname{sen}x+3\cos x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x+2\cos x}{(\operatorname{sen}x-2\cos x)^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x-3\cos x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{3\cos x-4\operatorname{sen}x}{(3\operatorname{sen}x-4\cos x)^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\tan x}$

130. *Repetir el ejercicio anterior para la integral

$$\int \frac{a\operatorname{sen}x+b\cos x+c}{\alpha\operatorname{sen}x+\beta\cos x+\gamma}\,dx=Ax+B\operatorname{lgn}\mid \alpha\operatorname{sen}x+\beta\cos x+\gamma\mid +C\int\frac{dx}{\alpha\operatorname{sen}x+\beta\cos x+\gamma}$$

y las integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x+2\cos x-3}{\operatorname{sen}x-2\cos x+3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{2}+\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{sen}x+\cos x}{3\operatorname{sen}x+4\cos x-2}\,dx$

(*Sugerencia*: recuerde que la integral que aparece multiplicada por C se resuelve con el método del §128.)

131. ¿Se puede hacer en la integral $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ el cambio $x=\operatorname{sen}\theta$?

132. *Esta pregunta expone un nuevo método de integración para ciertas funciones trigonométricas; las sustituciones hiperbólicas. Sea $I=\int\cos^m x\operatorname{sen}^n x\,dx$, donde m,n son enteros arbitrarios, tales que $m+n$ sea un número impar negativo. Entonces las sustituciones hiperbólicas tienen la forma

$$1^{\text{er}}\text{ cambio}:\quad \tan x=\operatorname{senh}\theta \implies \begin{cases} \sec^2 x\,dx=\cosh\theta\,d\theta \\ \sec x=\sqrt{1+\tan^2 x}=\sqrt{1+\operatorname{senh}^2\theta}=\cosh\theta \end{cases},\quad -\pi/2<x<\pi/2$$

$$2^{\text{do}}\text{ cambio}:\quad \operatorname{ctg} x=\operatorname{senh}\theta \implies \begin{cases} -\csc^2 x\,dx=\cosh\theta\,d\theta \\ \csc x=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}=\sqrt{1+\operatorname{senh}^2\theta}=\cosh\theta \end{cases},\quad 0<x<\pi/2$$

Además, es útil tener en cuenta que $e^\theta=\cosh\theta+\operatorname{senh}\theta$, por lo que $\theta=\operatorname{lgn}(\cosh\theta+\operatorname{senh}\theta)$. Como se puede ver en los dos cambios posibles, la integral, que está en función de senos y cosenos, debe ser puesta en función de tangentes y secantes (en el primer cambio) o de cotangentes y cosecantes (en el segundo). Verificar que los cambios de variable presentados tienen sentido y usarlos para resolver las siguientes integrales:

*Esta pregunta es la primera de las que aparecen en este capítulo como *métodos de integración alternativos*, es decir, sirven para resolver *solamente* las integrales del tipo considerado en esta pregunta. Como serán marcadas con * este tipo de integrales, que no aparecen en las guías de práctica regulares, el lector ocasional o el que no dispone de tiempo para resolver toda la guía, puede omitirlas.

(a) $\int \sec x\, dx$ (c) $\int \tan^2 x \sec x\, dx$ (e) $\int \dfrac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^6 x}\, dx$

(b) $\int \csc^3 x\, dx$ (d) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}$ (f) $\int \operatorname{ctg}^3 x \csc x\, dx$

♢ *Solución*: Resolvamos a modo ilustrativo el (b). Se trata de la integral $\int \cos^0 x \operatorname{sen}^{-3} x\, dx$, por lo que $m + n = -3$ y el método se aplica. Como ya está escrita en función de cosecantes, ensayamos con el segundo cambio, y haciendo todas las sustituciones mencionadas en el enunciado de este ejercicio, tenemos:

$$\begin{aligned}\int \csc^3 x\, dx &= -\int \csc x(-\csc^2 x\, dx) = -\int \csc x\, d(\operatorname{ctg} x) = -\int \cosh\theta(\cosh\theta\, d\theta) = -\int \cosh^2\theta\, d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int (1+\cosh 2\theta)\, d\theta = -\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{senh}\theta\right) + C = -\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta + C \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{lgn}(\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta) - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x \csc x + C = -\frac{1}{2}\operatorname{lgn}(\csc x + \operatorname{ctg} x) - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\csc x + C \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{lgn}(\csc x - \operatorname{ctg} x) - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x \csc x + C\ ,\end{aligned}$$

y este ejemplo es suficiente para ver que el método usado es el más apropiado, ya que la integral que acabamos de resolver, al igual que la (a) y la (c) (cuando menos), se resuelven por integración por partes, método que está adelantado con respecto a este. ♢

133. Sea $f(x)$ una función monótona contínua y $f^{-1}(x)$ su inversa. Usar el método de integración por partes para demostrar que si $\int f(x)dx = F(x)$, entonces $\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$. Analizar los casos concretos de $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f(x) = x^n$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$.
♢ *Solución*: Llamando $u = f^{-1}(x)$ y $dv = dx$, la fórmula de integración por partes arriba a

$$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int x(f^{-1})'(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int f(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int f(t)\ dt\ ,$$

donde $t = f^{-1}(x)$ es el cambio que nos permite aplicar la hipótesis. Si usamos esta fórmula para el caso $f(x) = \mathrm{e}^x$ y $f^{-1}(x) = \operatorname{lgn} x$, tenemos que $F(x) = \int \mathrm{e}^x\ dx = \mathrm{e}^x$:

$$\int \operatorname{lgn} x\, dx = x\operatorname{lgn} x - \mathrm{e}^{\operatorname{lgn} x} + C = x \operatorname{lgn} x - x + C\ ,$$

la cual el lector debería comprobar que es correcta, por supuesto, integrando por partes directamente. ♢

134. Demostrar la siguiente versión de la fórmula de integración por partes $\int uv\ dw = uvw - \int uw\ dv - \int vw\ du$, y usarla para resolver la integral $\int x\, \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\, dx$ (nótese que esta fórmula es apropiada cuando u, v, w no tienen relación entre sí; cuando la resuelva, recuerde usar la versión normal cuando así sea necesario).

135. Demostrar la siguiente versión de la fórmula de integración por partes:

$$\int f^{(n)} g\, dx = f^{(n-1)}g - f^{(n-2)}g' + f^{(n-3)}g'' - \ldots + (-1)^n \int f g^{(n)}\, dx\ ,$$

donde $f^{(k)}$ denota la derivada k-ésima. Con este resultado, calcular las siguientes integrales:

(a) $\int (x^2 - 4x + 5)\, \mathrm{e}^{2x}\ dx$ (b) $\int \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen} 3x\, dx$ (c) $\int (x^2 - 3x - 3)(\operatorname{lgn} x)^2\, dx$

136. Resolver nuevamente la integral $\int \sec^3 x\, dx$, notando que $\sec^3 x = (1 + \tan^2 x)\sec x$ e integrando por partes.

137. (a) Demostrar que

$$\int \operatorname{arcsen} x \operatorname{lgn} x\, dx = \operatorname{lgn} x\left[x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + 1\right] - x\operatorname{arcsen} x - 2\sqrt{1-x^2} - \operatorname{lgn}\left|1 - \sqrt{1-x^2}\right| + C\ ,$$

usando cualquiera de las elecciones $dv = \operatorname{arcsen} x$ ó $dv = \operatorname{lgn} x$. La idea de este ejercicio no es lo complicado, sino que lo distintas que son el arcoseno y el logaritmo obliga a que se hagan elecciones “forzadas” para dv, que a su vez se resuelven integrando por partes.

(b) Repetir la parte anterior para calcular la integral $\int \operatorname{lgn} x \operatorname{lgn}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,dx$, usando $dv = \operatorname{lgn} x$.

138. Sean P_n un polinomio de grado n y a, b constantes. Demostrar la existencia de los polinomios Q_n, R_n (a coeficientes indeterminados) y las constantes A, B, C tales que

$$\begin{aligned}
\int P_n(x)\operatorname{sen} ax\,dx &= Q_n(x)\operatorname{sen} ax + R_n(x)\cos ax + C\ ,\\
\int P_n(x)\,\mathrm{e}^{bx}\,dx &= Q_n(x)\,\mathrm{e}^{bx} + C\ ,\\
\int P_n(x)\operatorname{lgn} x\,dx &= xQ_n(x)\operatorname{lgn} x + xR_n(x) + C\ ,\\
\int \mathrm{e}^{bx}\operatorname{sen} ax\,dx &= \mathrm{e}^{bx}(A\operatorname{sen} ax + B\cos ax) + C\ ,\\
\int \operatorname{sen} ax\cos bx\,dx &= A\operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx + B\cos ax\cos bx + C\ .
\end{aligned}$$

(*Sugerencia*: necesitará integración por partes y, de seguro, un poco de inducción). Una vez hecho esto, estas fórmulas se pueden aplicar a casos concretos, estableciendo la forma del resultado final (los polinomios se deben expresar con coeficientes indeterminados) y luego derivando miembro a miembro. Hágalo Ud.:

(a) $\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,dx$

(b) $\int (x^2+2x+2)\,\mathrm{e}^{x}\,dx$

(c) $\int \mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen} 5x$

(d) $\int x^7\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$

(e) $\int \mathrm{e}^{ax}\cos^2 bx\,dx$

(f) $\int x\cos\sqrt{x}\,dx$

(g) $\int (x^2-1)\operatorname{lgn} x\,dx$

(h) $\int x(x^2+4)^3\operatorname{lgn}(x^2+4)\,dx$

(i) $\int x^{n-1}\operatorname{lgn} x\,dx$, $n\in\mathbf{N}$

139. Usar integración por partes para resolver las siguientes integrales:

(a) $\int x\sec x\tan x\,dx$

(b) $\int (x-\operatorname{sen} x)^3\,dx$

(c) $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$

(d) $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

(e) $\int x\arctan(x+1)\,dx$

(f) $\int \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

(g) $\int \operatorname{arcsen}^2 x\,dx$

(h) $\int \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x\,dx$

(i) $\int x(1+x^2)\operatorname{arcctg} x\,dx$

(j) $\int (x^2-3x)\operatorname{lgn}(x-1)\,dx$

(k) $\int \arctan\dfrac{x-1}{x+1}\,dx$

(l) $\int x\arccos\dfrac{1}{x}\,dx$

(m) $\int \left(\dfrac{\operatorname{lgn} x}{x}\right)^2 dx$

(n) $\int \operatorname{lgn}(1+x^2)\,dx$

(o) $\int \operatorname{lgn}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx$

(p) $\int \operatorname{sen}\operatorname{lgn} x\,dx$

(q) $\int \operatorname{lgn}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$

(r) $\int (\mathrm{e}^{x}-\cos x)^2\,dx$

(s) $\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(t) $\int \dfrac{x^5}{(x^3+1)^2}\,dx$

(u) $\int \dfrac{(3+x^2)x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$

(v) $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(w) $\int \operatorname{sen} mx\cos nx\,dx$

(x) $\int \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\,dx$

(y) Sean $I = \int \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)dx$ y $J = \int \mathrm{e}^{sx}\operatorname{sen}(tx)dx$. Demostrar que

$$tI + sJ = \mathrm{e}^{sx}\operatorname{sen} tx + C \quad , \quad sI - tJ = \mathrm{e}^{sx}\cos tx + C$$

(z) Demostrar por inducción la fórmula $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,t^n\,dt = n!\,\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x} - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$.

◊ *Solución*: Por el grado de complicación de los mismos, elegimos como ejemplos resueltos al (h), al (l) y al (u).

(h) Para el primero, notemos que $\operatorname{arcsen} x$ no tiene primitiva sencilla; de hecho, si $dv = \operatorname{arcsen} x\,dx$, v se calcula como una integral por partes. Parece entonces que $dv = \sqrt{1-x^2}\,dx$. Dejamos al lector la comprobación (via sustitución trigonométrica) que

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right) .$$

Sustituyendo esto y la elección $u = \operatorname{arcsen} x$ en la fórmula de integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x\,dx &= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x\left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}^2 x + x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x\right) - \frac{1}{2}\int\left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} + x\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}^2 x + x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}^2 x + \frac{x^2}{2}\right) + C \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{arcsen}^2 x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x - \frac{x^2}{4} + C .
\end{aligned}$$

Este ejemplo muestra que la elección de u y dv puede ser complicada y que la elección correcta de dv puede requerir, a su vez, otro método de integración.

(l) Para el segundo ejemplo, notemos primero que si

$$\arccos\frac{1}{x} = y \implies 1/x = \cos y \implies x = \sec y \implies \operatorname{arcsec} x = y \implies \arccos\frac{1}{x} = \operatorname{arcsec} x ,$$

por lo que evitamos calcular $du = d\left(\arccos\frac{1}{x}\right) = d(\operatorname{arcsec} x) = \dfrac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ por medio de la regla de la cadena. Usando esto y la elección $dv = x\,dx$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\int x\arccos\frac{1}{x}\,dx &= \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} \mp \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \operatorname{sgn}(x)\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} ,
\end{aligned}$$

donde $\operatorname{sgn}(x)$ es 1 si $x > 0$ ó -1 si $x < 0$. El uso de esta función nos evita el peligro de escribir $\pm$, ya que esto se hace cuando *hay dos resultados*, mientras que aquí hay uno solo, que cambia de signo en $x = 0$.

(u) En este tercer ejemplo, el subintegrando no parece tener nada que ver con el método que estamos estudiando. Pero precisamente integrar por partes es una de las herramientas más útiles del cálculo integral, ya que ayuda, como en este caso, a no resolver la integral por el método de fracciones simples, que está adelantado al orden de los métodos que hemos visto. Notando que en la fracción $\dfrac{(3+x^2)x^3}{(1+x^2)^3}$ el numerador se le disminuye el grado por integración y al numerador se le disminuye por derivación, tomamos $u = 3x^2 + x^4$ y $dv = \dfrac{x}{(1+x^2)^3}$:

$$\begin{aligned}
\int\frac{(3+x^2)x^3}{(1+x^2)^3}\,dx &= -\frac{1}{4}\frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{6x+4x^3}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{3x^2+x^4}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{2x(3+2x^2)}{(1+x^2)^2}\,dx \\
&\overset{*}{=} -\frac{3x^2+x^4}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{3+2x^2}{1+x^2} + \int\frac{4x}{1+x^2}\,dx\right) \qquad \left[s = 3+2x^2 \ , \ dr = \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2}\right] \\
&= -\frac{3x^2+x^4}{4(1+x^2)^2} - \frac{3+2x^2}{4(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{lgn}(1+x^2) + C \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{lgn}(1+x^2) - \frac{3x^4+8x^2+3}{4(1+x^2)^2} + C ,
\end{aligned}$$

donde en el paso (*) aplicamos nuevamente integración por partes, haciendo allí una elección con otras letras que no sean u y dv para evitar confusión. En este ejemplo se vé la fuerza del método, ya que dos integraciones por partes nos ahorro dejar esta integral para el método de fracciones simples. Más aún, el resultado final queda simplificado casi por completo.

$\diamondsuit$

140. Esta pregunta aclara la elección de $C = 0$ en integración por partes.

(a) Suponiendo que las funciones f y g están ligadas por medio de la relación

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \ ,$$

demostrar que es válida la relación

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)\left[g(x)+C\right] - \int f'(x)\left[g(x)+C\right]\,dx \ .$$

(b) Resolvamos la integral $I = \displaystyle\int x \arctan x\,dx$ de dos modos:

i. Resolverla usando integración por partes y eligiendo $C = 0$ en la parte anterior, para llegar a

$$I = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} \ .$$

ii. Repetir dicho procedimiento, pero ahora eligiendo $C = 1/2$ para obtener $I = \dfrac{x^2+1}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int dx$.

Terminar ambos cálculos para demostrar que $I = \dfrac{x^2+1}{2}\arctan x - \dfrac{x}{2} + K$. Esto muestra, con un ejemplo en concreto, que no es siempre necesario elegir $C = 0$ en el cálculo de dv en integración por partes, ya que otro valor del mismo puede simplificar enormemente los cálculos.

(c) Rehacer la parte anterior para cada una de las siguientes integrales por partes, es decir, resolverlas por el método tradicional y tomar C arbitrariamente en cada caso; usar el valor de C dado para que la integral $-\displaystyle\int f'(x)\left[g(x)+C\right]\,dx$ resulte más fácil de calcular:

i. $\displaystyle\int \operatorname{lgn}(2x-5)\,dx$, $C = -5/2$

ii. $\displaystyle\int x \operatorname{lgn}\frac{x}{1-x^2}\,dx$, $C = -1/2$

iii. $\displaystyle\int x \arctan(2x+3)\,dx$, $C = -1$

iv. $\displaystyle\int x \operatorname{lgn}\frac{1-x}{1+x}\,dx$, $C = -1/2$

v. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\sqrt{x}\,dx$, $C = -1/2$

vi. $\displaystyle\int x \arctan\frac{1-x}{1+x}\,dx$, $C = 1/2$

(d) ¿Por qué es indiferente el valor de C que se tome al calcular la integral $\displaystyle\int x\,e^{2x}\,dx$? (La idea de esta pregunta es que el lector observe que, en la parte anterior, todas las integrales que se resolvieron con un valor de C especial involucraban funciones no racionales cuya derivada si lo es.)

141. A estas alturas, el lector ya se habrá dado cuenta que hay ciertas integrales, todas ellas envolviendo subintegrandos exponenciales, trigonométricos e hiperbólicos, que se resuelven por despeje de la integral buscada cuando se integra por partes. Esta pregunta generaliza este resultado.

(a) Sean f, g funciones tales que cada una de ellas es proporcional a su segunda derivada, es decir, tales que $\exists\, h, k$ con $f''(x) = hf(x)$ y $g''(x) = kg(x)$. Usar integración por partes para demostrar que

$$\int f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{h-k}\left[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\right] \ ,$$

siempre y cuando $h \neq k$.

(b) ¿Que ocurre en la parte anterior si $h = k$? (*Sugerencia*: si no lo vé todavía, intente con $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ y trate de resolver $\int fg\,dx$ como "si fuera" por partes).

(c) En vista que $(e^{ax})'' = a^2 e^{ax}$, $(\operatorname{sen} bx)'' = -b^2 \operatorname{sen} bx$ y $(\cosh cx)'' = c^2 \cosh cx$, las siguientes fórmulas se pueden obtener integrando por partes ó por la fórmula de la parte (a). Hágalo Ud. de las dos formas para que se convenza que dá igual:

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[a\,e^{ax}\operatorname{sen} bx - b\,e^{ax}\cos bx\right] + C \ ,\\
\int \operatorname{sen} bx \cosh cx\,dx &= \frac{1}{b^2+c^2}\left[c \operatorname{senh} cx \operatorname{sen} bx - b\cosh cx \cos bx\right] + C \ ,\\
\int e^{ax} \cosh cx\,dx &= \frac{1}{a^2-c^2}\left[a\,e^{ax}\cosh cx - c\,e^{ax}\operatorname{senh} cx\right] + C \ .
\end{aligned}$$

Más aún, en la última de las tres vea lo qué ocurre si $a = c$. Como la fórmula dada tiene una división entre cero, es claro que no se puede integrar por partes en este caso, como ya se analizó en la parte (b). Remedie la situación cuando $a = c$ en dicha fórmula.

142. En cada uno de los siguientes casos se dá una integral por partes que debe ser tratada con cuidado; cada una constituye un caso especial del método antedicho. Si no consigue resolverlas de inmediato, siga la sugerencia dada:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}$; multiplique arriba y abajo por $\operatorname{sen} x$; note que $(x\cos x - \operatorname{sen} x)' = -x\operatorname{sen} x$, por lo que debe tomar $dv = \dfrac{x\operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}$ y $u = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn} x - 1}{\operatorname{lgn}^2 x}dx$; separe en dos integrales e integre por partes sólo la primera, haciendo $u = 1/\operatorname{lgn} x$ (note que se cancela la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{lgn} x}$, que de paso, no es resoluble).

(c) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}dx$; $\dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1-1)\,\mathrm{e}^x}{(x+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1} - \dfrac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$ e integre la segunda fracción, haciendo el cambio $dv = -\dfrac{dx}{(x+1)^2}$.

(d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x}\,dx$; llamar I la integral y seguir los siguientes pasos:

i. hacer $u = \mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x}$;

ii. multiplicar arriba y abajo por $\sqrt{1-x^2}$ y hacer $dv = \dfrac{\mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ y $u = \sqrt{1-x^2}$.

Ahora sumar ambos resultados y despejar I (note que si se restan estos resultados en vez de sumarlos, puede hallar también el valor de la integral $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ sin mayor esfuerzo).

(e) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,\frac{x\cos^3 x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$; separe la integral en dos por la resta del numerador; en la primera, tomar $dv = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\cos x$ y en la segunda, tomar $dv = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$.

(f) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\,\mathrm{e}^x\,dx$; demostrar la identidad $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan\dfrac{x}{2}\right)^2$ y desarrollar la integral según este polinomio trigonométrico (se cancelará la integral $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\,dx$, que se tampoco es resoluble).

$\diamondsuit$ *Solución*: Resolvamos el (e). Siguiendo la sugerencia dada, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,\frac{x\cos^3 x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx &= \int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx}_{dv} - \int \underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}_{s}\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx}_{dt} = \int x\,d\left(\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\right) - \int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,d\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\
&= \underbrace{x}_{u}\underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}_{v} - \int \underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}_{u}\underbrace{dx}_{dv} - \underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}_{s}\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{t} + \int \underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\cos x}_{ds}\underbrace{\frac{dx}{\cos x}}_{t} \\
&= x\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - \int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,dx - \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{\cos x} + \int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,dx \;=\; x\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{\cos x} \\
&= \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,(x - \sec x)\ .
\end{aligned}$$

Nótese que la integral $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$ no es resoluble*, pero no hay que resolverla, ya que se cancela cuando integramos por partes ambas integrales. Esta patología ocurre en este y en todos las partes de este ejercicio, por lo cual es considerado como especial, ya que el método de integración por partes **es el único** que detecta integrales no resolubles como parte de otras que si lo son. $\diamondsuit$

*De este tipo de integrales hablaremos en el ejercicio §147.

143. Otro de los más importantes usos de la integración por partes es establecer las llamadas *fórmulas de reducción*, que sirven para llevar integrales generales (esto es, dependientes de un entero n) a otras mas sencillas, reduciéndole el grado al integrando hasta las mas simple posible. En cada uno de los siguientes casos, si a es una constante *diferente* de cero, demostrar la fórmula de reducción y aplicarla a la resolución de la integral que la acompaña:

(a) $$I_{m,n} = \int x^m (ax+b)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}(ax+b)^n + nb\,I_{m,n-1}}{m+n+1} \\ \dfrac{x^m(ax+b)^{n+1} + mb\,I_{m-1,n}}{a(m+n+1)} \end{cases} \quad ; \quad \text{calcular } I = \int x^7(2x^2-5)^3\,dx$$

(b) $$I_m = \int x^m\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{(2m+3)a}\left[x^m(ax+b)^{3/2} - mb\,I_{m-1}\right] \quad ; \quad \text{calcular } I = \int x^3\sqrt{2x-1}\,dx$$

(c) $$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\,I_{n-1}\right] \quad ; \quad \text{calcular } I = \int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$$

(d) $$I_n = \int (ax^2+bx+c)^{n+1/2}\;dx = \frac{(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}{4a(n+1)} + \frac{(2n+1)(4ac-b^2)\,I_{n-1}}{8a(n+1)} \quad ; \quad \text{calcular } I = \int (x^2+2x)^{5/2}\,dx$$

(e) $$I_m = \int x^m \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{m\operatorname{sen} ax - ax\cos ax}{a^2}x^{m-1} - \frac{m(m-1)}{a^2}\,I_{m-1} \quad ; \quad \text{calcular } I_2$$

(f) $$I_n = \int \cos^n ax = \frac{\operatorname{sen} ax\cos^{n-1} ax}{an} + \frac{n-1}{n}\,I_{n-2} \quad ; \quad \text{calcular } I_4 \text{ e } I_5$$

(g) $$I_n = \int x^n\,\mathrm{e}^{ax}\;dx = \frac{x^n\,\mathrm{e}^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\,I_{n-1} \quad ; \quad \text{calcular } I = \int x^3\,\mathrm{e}^{2x}\;dx$$
$$\text{calcular } I = \int x^3\operatorname{lgn}^2 x\,dx$$

(h) $$I_n = \int \tanh^n ax\,dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{a(n-1)} + I_{n-2} \quad ; \quad \text{calcular } I = \int \left(\frac{\mathrm{e}^{4x}-1}{\mathrm{e}^{4x}+1}\right)^5 dx$$

(i) Sea n un entero positivo. Demostrar que $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$, donde (por definición) $0! = 1$ y $k! = k(k-1)(k-2)\ldots 2.1$.

♢ *Solución*: Resolvamos el último. Sea I_n la integral buscada. Entonces

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-1}(1-x^2)\,dx = I_{n-1} - \int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)^{n-1}\,dx \\ &= I_{n-1} - \left(-\frac{x(1-x^2)^n}{2n}\Big]_{-1}^{1} + \frac{1}{2n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx\right) = I_{n-1} - \frac{1}{2n}I_n \\ \Longrightarrow I_n &= \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2^2n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)}I_{n-2} = \cdots = \frac{2^n n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}I_0\,, \end{aligned}$$

donde hemos iterando la primera fórmula de la última linea. Notando que $I_0 = 2$, obtenemos (tras una ligera amplificación en los factoriales) la fórmula deseada. ♢

144. Hallar el volúmen del sólido que se origina al girar la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{x}$, $x = \pi^2/4$, $x = \pi^2/9$ y el eje x, alrededor del eje y.

145. Se recuerda (a esto nos referimos a Algebra de Bachillerato) que toda fracción de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $\operatorname{grd}(P) = m$ y $\operatorname{grd}(Q) = n$, tiene una descomposición en fracciones simples. Se puede demostrar (cosa que no está al alcance de esta guía) que el plan de ataque para las integrales $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ es la siguiente:

(I) Hacer la división polinómica de P/Q si $m \geq n$, de modo que $\dfrac{P}{Q} = C + \dfrac{R}{Q}$, donde $C(x)$ representa el cociente de dicha división y $R(x)$ su resto (más precisamente, con la condición $\mathrm{grd}(C) = m - n$ y $\mathrm{grd}(R) \leq n - 1$).

(II) Si $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$, con todos los a_i *distintos entre sí*, entonces la descomposición de R/Q tiene la forma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n} \ ,$$

para ciertas *constantes* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que se pueden hallar de la siguiente forma:

A) Por simplificación de la suma de fracciones simples del lado derecho de la última ecuación, y posterior identificación de ambos numeradores, usando luego el *método de coeficientes indeterminados*.

B) Si se quiere evitar el sistema de ecuaciones del paso anterior, nótese que

$$\frac{(x - a_i)R(x)}{Q(x)} = \frac{x - a_i}{x - a_1}A_1 + \ldots + \frac{x - a_i}{x - a_{i-1}}A_{i-1} + A_i + \frac{x - a_i}{x - a_{i+1}}A_{i+1} + \ldots + \frac{x - a_i}{x - a_n}A_n \ ,$$

por lo que el lado derecho de esta ecuación es una constante cuando $x = a_i$ e igual a A_i, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Pero el lado izquierdo es una forma indeterminada polinómica de la forma $0/0$, la cual es fácil de resolver por cancelación del factor $(x - a_i)$:

$$\lim_{x \to a_i} \frac{(x - a_i)R(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a_i} \frac{(x - a_i)R(x)}{(x - a_1) \ldots (x - a_i) \ldots (x - a_n)} = \frac{R(a_i)}{S(a_i)} \ ,$$

donde $S(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \ldots (x - a_n)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Aquí lo único raro que puede pasar es que $R(a_i) = 0$, pero eso significa que $A_i = 0$, ya que, por hipótesis, $S(a_i) \neq 0$.

C) Si se quiere agilizar un poco más la búsqueda de los A_i, es interesante notar que la forma indeterminada del paso anterior se puede resolver por la Regla de L'Hôpital, de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} A_i &= \lim_{x \to a_i} \frac{[(x - a_i)R(x)]'}{Q'(x)} = \lim_{x \to a_i} \frac{R(x) + (x - a_i)R'(x)}{\sum_{j=1}^{n} (x - a_1) \ldots \overline{(x - a_j)} \ldots (x - a_n)} \\ &= \frac{R(a_i) + 0 \cdot R'(a_i)}{S(a_i)} = \frac{R(a_i)}{S(a_i)} \ , \end{aligned}$$

donde la expresión en el denominador (a la que se le ha aplicado la regla del producto) es una suma de términos polinómicos de grado $n - 1$ y cada sumando carece del factor que tiene la barra. Como esta expresión consta de varios factores que se anulan cuando $x \to a_i$ menos uno de ellos (precisamente $S(x)$, cuando $j = i$ en la sumatoria), hemos demostrado que $A_i = \dfrac{R(a_i)}{Q'(a_i)}$ (cuidado: se parece a la Regla de L'Hôpital, sólo que aquí no se deriva el numerador).

(a) $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 37}{x^2 + x - 12}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^3 + 1)(x^3 + 8)}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 1}{x(x^4 - 5)(x^5 - 5x + 1)}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{1 - x^7}{x(1 + x^7)}\,dx$

III) Si $Q(x) = (x - a)^{n_1}(x - b)^{n_2} \ldots (x - k)^{n_k}$, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ y las constantes $a, b, \ldots, k$ todas *diferentes entre sí*, entonces la descomposición de R/Q tiene la forma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{n_1}}{(x - a)^{n_1}} + \frac{A_{n_1 - 1}}{(x - a)^{n_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \frac{A_1}{x - a} + \ldots\ldots + \frac{K_{n_k}}{(x - k)^{n_k}} + \frac{K_{n_k - 1}}{(x - k)^{n_k - 1}} + \ldots + \frac{K_1}{x - k} \ ,$$

donde todas las constantes mayúsculas se hallan por medio del método dado en (A).

(j) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$ (l) $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx$ (n) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$

(k) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$ (m) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$ (o) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^4-1)^2}\,dx$

(p) Hallar las condiciones sobre a, b, c para que la integral $\displaystyle\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$ represente una función racional, es decir, no contenga términos logarítmicos.

(q) Demostrar que la sustitución $u = \dfrac{x+a}{x+b}$ resuelve el problema del cálculo de la integral

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}\,dx\ ,$$

para todos $m, n \in \mathbf{N}$, y usar esta sustitución para hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x-3)^3}\,dx$.

IV) Si $Q(x) = (a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\ldots(a_kx^2+b_kx+c_k)$, con $a_i \neq 0$, $b_i^2-4a_ic_i<0$, para todo $i=1,2,\ldots,k$ y $2k=n$, entonces la descomposición de R/Q tiene la forma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{a_kx^2+b_kx+c_k}\ ,$$

donde nuevamente se hallan las constantes A_i y B_i por el método dado en (A), o por un artificio variante de éste:

D) Al integrar estos factores, hay que "forzar" a los numeradores a ser la "derivada interna" de los denominadores. Para evitar este trabajo adicional, se busca la descomposición de R/Q en la forma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{C_1(2a_1x+b_1)+D_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{C_2(2a_2x+b_2)+D_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \ldots + \frac{C_k(2a_kx+b_k)+D_k}{a_kx^2+b_kx+c_k}\ ,$$

donde se vé claramente que esta elección no contradice la descomposición natural, ya que se puede poner $C_i = \dfrac{A_i}{2a_i}$ y $D_i = B_i - C_ib_i$, sistemas compatibles por ser $a_i \neq 0$, para todo $i=1,2,\ldots,k$.

(r) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$ (u) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ (x) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$

(s) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$ (v) $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$ (y) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

(t) $\displaystyle\int \frac{x}{x^8-1}\,dx$ (w) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$ (z) $\displaystyle\int \frac{x^2+10}{x^4+16x^2+100}\,dx$

V) Si $Q(x) = (ax^2+bx+c)^k$, donde $a \neq 0$, $b^2-4ac<0$ y $2k=n$ (es suficiente considerar un solo factor, ya que si hay mas, por lo casos anteriores sabemos que aparecen muchos más sumandos), entonces la descomposición de R/Q es de la forma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k} + \frac{A_{k-1}x+B_{k-1}}{(ax^2+bx+c)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}\ ,$$

donde ya se sabe como calcular los A_i y B_i, para todo $i=1,2,\ldots,k$.

(α) $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$ (γ) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$ (ϵ) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\,dx$

(β) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2(x^2+1)}$ (δ) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^3}$ (ζ) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$

(η) Deducir, si es necesario integrando por partes, una fórmula de recurrencia para la integral

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \ , \quad a \neq 0 \ , \ b^2 - 4ac < 0 \ ,$$

y aplicar esta fórmula para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$ (*Sugerencia*: usar la identidad

$$4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + (4ac-b^2) \ )$$

VI) Finalmente, los siguientes son algunos "trucos" que pueden servir para aligerar un poco estos métodos, bastante prácticos en algunos casos:

(θ) Resolver las integrales $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^2-x}{(x^2+1)(x+1)}\,dx$, $I_2 = \displaystyle\int \frac{x^2-2x+1}{x(x^2+1)}\,dx$ e $I_3 = \displaystyle\int \frac{x^4+x^2-x+1}{x^5+x^3}\,dx$ *sin hallar* las fracciones simples, sino manipulando la fracción para que queden integrales inmediatas.

(ι) Demostrar que todo polinomio de la forma

$$Q(x) = a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1 x^{n+1} + a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \ ,$$

llamado *polinomio simétrico*, se puede factorizar haciendo previamente el cambio de variable $u = x + \dfrac{1}{x}$, y usar esta factorización para resolver las integrales

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} \quad \text{y} \quad \int \frac{x^2+x+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx \ .$$

(κ) Resolver las integrales $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^2}{x^4+10x^2+16}\,dx$ e $I_2 = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$, notando que los subintegrandos *sólo dependen* de x^2, por lo que los numeradores de las fracciones simples son constantes (¿por qué?).

(λ) Consideremos $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{3x-1}{x^4-5x^2+6}$. En analogía con el truco usado en la parte anterior, el denominador tiene las factorizaciones posibles

$$q(x) = x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2-2)(x^2-3) \text{ ó } q(x) = x^4-5x^2+6 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) \ .$$

La segunda factorización es especialmente incómoda por estar los coeficientes en $\mathbf{I} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, y el sistema de ecuaciones que se va a resolver tiene coeficientes irracionales. Sin embargo, si se usa la primera factorización, se deben tratar de hallar las fracciones simples de $p(x)/q(x)$ en analogía al caso complejo, **no importa** cuál sea la naturaleza de $p(x)$. Usar esto para comprobar que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = -\frac{3x-1}{x^2-2} + \frac{3x-1}{x^2-3} \ ,$$

y resolver la integral de $p(x)/q(x)$.

VII) *Método de Ostrogradski*: Según los cuatro casos de descomposición de fracciones simples que hemos visto, es claro que el que ofrece mayor dificultad de cálculos es el de raíces múltiples, especialmente si las hay complejas. En la mayoría de los textos rusos (como el citado en la bibliografía) aparece un método que permite predecir que en la integración de una fracción propia $R(x)/Q(x)$, donde $Q(x)$ tiene raíces múltiples, aparecen términos racionales y un solo término logarítmico (en el caso de raiz simple) y un solo término con tangente inversa (en el caso de raiz compleja). Esto permite reducir el cálculo de dicha integral a la de una función racional, pero donde el denominador **solo tiene raíces simples**. Resumimos todo esto como un teorema (sin demostración, por razones de espacio), y algún ejemplo resuelto.

Teorema 7.1. (OSTROGRADSKI) Sean $R_k(x)$ y $Q_n(x)$ polinomios de grados $k \le n-1$ y n, respectivamente. Si

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s} \ ,$$

con $\alpha_r, \beta_s > 1$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i + 2\sum_{j=1}^s \beta_j = n$ y $p_j^2 - 4q_j < 0$, entonces existen polinomios $X(x)$ y $Y(x)$, a coeficientes indeterminados, tales que

$$\begin{aligned}\int \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}\,dx &= \frac{X(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\dots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}}\\ &+ \int \frac{Y(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\dots(x^2+p_sx+q_s)}\,dx \ ,\end{aligned}$$

donde los grados de $X(x)$ y $Y(y)$ son de grado uno menos de los grados de los denominadores de las fracciones que ocupan.

(λ) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ (ν) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$ (o) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$

(μ) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$ (ξ) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}$ (π) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+x^6}$

♢ *Solución*: Para ejemplificar este método, resolvamos el (ν). El método de Ostrogradski nos permite escribir

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^2+1)^3} + \int \frac{Gx+H}{x^2+1}\,dx \ ,$$

ya que a partir del hecho de que $x^2+1 = (x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$ no tiene raíces reales, y como $(x^2+1)^3$ es un polinomio de grado 6, el numerador de la primera fracción debe ser de grado 5. Además, x^2+1 es el polinomio de mínimo grado que divide a $(x^2+1)^4$, de modo que la segunda integral debe tener a x^2+1 como denominador, y a un polinomio de primer grado como numerador. Para hallar las constantes $A, B, \dots, H$ derivamos ambos miembros de la ecuación anterior para obtener

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+1)^4} &= \frac{5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E}{(x^2+1)^3} - \frac{6x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)}{(x^2+1)^4} + \frac{Gx+H}{x^2+1}\\ &= \frac{Gx^7+(H-A)x^6+(3G-2B)x^5+(5A-3C+3H)x^4+(4B-4D+3G)x^3}{(x^2+1)^4}\\ &+ \frac{(3C-5E+3H)x^2+(2D-6F+G)x+(E+H)}{(x^2+1)^4}\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= G\\ 0 &= H-A\\ 0 &= 3G-2B\\ 0 &= 5A-3C+3H\\ 0 &= 4B-4D+3G\\ 0 &= 3C-5E+3H\\ 0 &= 2D-6F+G\\ 1 &= E+H\end{aligned}\right. \implies \begin{array}{l} B=D=F=G=0\\ \left\{\begin{aligned} 0 &= H-A\\ 0 &= 5A-3C+3H\\ 0 &= 3C-5E+3H\\ 1 &= E+H\end{aligned}\right.\end{array} \implies \begin{array}{c} A=H=\dfrac{5}{16}\\ C=\dfrac{5}{6}\ ,\ E=\dfrac{11}{16}\end{array}$$

por lo que la solución de la integral viene dada por

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{5x^5/16+5x^3/6+11x/16}{(x^2+1)^3} + \int \frac{5/16}{x^2+1}\,dx = \frac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^3} + \frac{5}{16}\arctan x + K \ .$$

Aunque el ejemplo no parezca corroborarlo, este método permite resolver más rápido el problema, ya que no hay que resolver sino integrales de funciones racionales con raíces simples. Claro está, si como en este caso el denominador tiene grado alto y además raíces complejas, el sistema al que se llega es de muchas incógnitas, pero siempre con soluciones fáciles de hallar. ♢

146. *Esta pregunta muestra algunos cambios de variable "exóticos", ya que las integrales que aparecen aquí son resolubles por los cambios que ya hemos visto, pero causando excesivo trabajo, mientras que estos nuevos métodos están especialmente diseñados para estas integrales.

1) *Generalización del cambio* $u = \tan(x/2)$: sea $I = \displaystyle\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$ una integral racional en las variables $\operatorname{sen} x$, $\cos x$. Resolver las siguientes integrales con los cambios de variable de la tabla adjunta:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\operatorname{sen} x}$

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

Si en la integral ocurre que:	hacer:
$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) \equiv -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$u = \cos x$
$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) \equiv -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$u = \operatorname{sen} x$
$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) \equiv R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$u = \tan x$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+\tan x + 4\operatorname{ctg} x}$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x + 5\operatorname{sen}^2 x}$

(e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^4 x}\, dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}\, dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x}$

2) *Sustituciones Hiperbólicas*: sea $I = \displaystyle\int R(\sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$, tal que se conoce la factorización en binomios lineales del trinomio de segundo grado. Resolver las siguientes integrales con los cambios de variable dados en la tabla adjunta:

(i) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$

(j) $\displaystyle\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\, dx$

Factorización del subintegrando:	Cambio de variable:
$ax^2+bx+c = a(x+x_1)(x+x_2)$	$x+x_1 = (x_2-x_1)\operatorname{senh}^2 u$
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x_2-x)$	$x-x_1 = (x_2-x_1)\tanh^2 u$
$ax^2+bx+c = a(x+x_1)(x_2-x)$	$x+x_1 = (x_2+x_1)\operatorname{sech}^2 u$

(k) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$

(l) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

(m) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-2x^2-3}}\, dx$

3) *Integrales de Tchebichev*: sea $I = \displaystyle\int x^m\,(a+bx^n)^p\, dx$, con $m = a/b$, $n = c/d$ y $p = r/s$ números racionales. Algunas de estas integrales **no son resolubles** en términos de funciones elementales, pero las *condiciones de Tchebichev*, mostradas en la tabla adjunta, dan las posibles resoluciones de este tipo de integrales, complicadas por la forma de los radicales:

(o) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}\, dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

Condición sobre m, n, p:	Cambio de variable:
p es un número entero	$x = z^{\text{m.c.m.}(b,d)}$
$\dfrac{m+1}{n}$ es un número entero	$a+bx^n = z^s$
$\dfrac{m+1}{n}+p$ es un número entero	$ax^{-n}+b = z^s$

(r) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

(s) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$

(t) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}$

(u) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

♢ *Solución*: Otra vez es conveniente tomar tres ejemplos, uno de cada tipo; el (d), el (k) y el (t).

(d) Como la sustitución formal de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por $-\operatorname{sen} x$ y $-\cos x$, respectivamente, deja invariante la fración, usamos el cambio $u = \tan x$. Para que este cambio se vea más claro en el subintegrando, es necesario hacer unas ligeras modificaciones:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\operatorname{sen}^2 x} &= \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sec^2 x(4-3\cos^2 x+5\operatorname{sen}^2 x)} = \int \frac{\sec^2 x}{4\sec^2 x - 3 + 5\tan^2 x}\, dx \\
&= \int \frac{\sec^2 x}{4+4\tan^2 x-3+5\tan^2 x}\, dx = \int \frac{d(tanx)}{1+9\tan^2 x} = \int \frac{du}{1+9u^2} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{d(3u)}{1+(3u)^2} = \frac{1}{3}\arctan 3u + C = \frac{1}{3}\arctan(3\tan x) + C\ .
\end{aligned}$$

Así, este cambio evita fracciones racionales con denominadores complicados, como los que se hubieran conseguido si se hace el cambio $u = \tan(x/2)$.

(k) Como el binomio de segundo grado del denominador ya está factorizado en la forma $a(x+x_1)(x+x_2)$ con $a=1$, $x_1=-1$ y $x_2=3$, usamos el primer cambio de la tabla: $x-1=(3-(-1))\operatorname{senh}^2 u = 4\operatorname{senh}^2 u$. Así, $dx = 8\operatorname{senh} u \cosh u\, du$ y $x+3=(x-1)+4=4\operatorname{senh}^2 u+4 = 4\cosh^2 u$. Juntando todos estos cambios en la integral en cuestión, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)} &= \int \frac{8\operatorname{senh} u\cosh u}{(4\operatorname{senh}^2 u)(4\cosh^2 u)}\,du = \int \frac{du}{2\operatorname{senh} u\cosh u} = \int \frac{du}{\operatorname{senh} 2u} \\
&= \int \operatorname{csch} 2u\, du = -\frac{1}{2}\int \frac{-\operatorname{csch}^2 2u - \operatorname{csch} 2u \operatorname{ctgh} 2u}{\operatorname{csch} 2u + \operatorname{ctgh} 2u} d(2u) \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{d(\operatorname{csch} 2u + \operatorname{ctgh} 2u)}{\operatorname{csch} 2u + \operatorname{ctgh} 2u} = -\frac{1}{2}\operatorname{lgn}|\operatorname{csch} 2u + \operatorname{ctgh} 2u| + C \\
&= -\frac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\frac{1+\cosh 2u}{\operatorname{senh} 2u}\right| + C = -\frac{1}{2}\operatorname{lgn}|\tanh u| + C \\
&= -\frac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\frac{\operatorname{senh} u}{\cosh u}\right| + C = -\frac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\frac{\operatorname{senh} u}{\sqrt{1+\operatorname{senh}^2 u}}\right| + C \\
&= \operatorname{lgn}\left|\frac{1+\operatorname{senh}^2 u}{\operatorname{senh}^2 u}\right| + C = \operatorname{lgn}\left|\frac{1+(x-1)/4}{(x-1)/4}\right| + C = \operatorname{lgn}\left|\frac{x+3}{x-1}\right| + C
\end{aligned}$$

Se vé de este ejemplo que el cambio hiperbólico es suficientemente eficiente, pero se requiere de un manejo extraordinario de las identidades hiperbólicas para usarlo con soltura.

(t) El subintegrando se puede escribir como $x^{-2}(2+x^3)^{-5/3}$, es decir, $m=-2$, $n=3$ y $p=-5/3$. Como $p=-5/3$ y $(m+1)/n = -1/3$ no son enteros, las dos primeras condiciones fallan. Pero la tercera vale, ya que $\frac{m+1}{n}+p = -\frac{1}{3}-\frac{5}{3} = -2$, por lo que hacemos el cambio de variable $2x^{-3}+1 = z^3$. Entonces

$$-6x^{-4}\,dx = 3z^2\,dz \quad \text{y} \quad x^3 = 2/(z^3-1)\ .$$

Para que todos estos cambios se vean sustituíbles, acomodamos un poco la integral previamente:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}} &= \int \frac{dx}{x^2x^5(2x^{-3}+1)^{5/3}} = \int \frac{dx}{x^7(2x^{-3}+1)^{5/3}} = -\frac{1}{6}\int \frac{-6x^{-4}\,dx}{x^3(2x^{-3}+1)^{5/3}} \\
&= -\frac{1}{6}\int \frac{3z^2\,dz}{2z^5/(z^3-1)} = -\frac{1}{4}\int \frac{z^5-z^2}{z^5}\,dz = -\frac{1}{4}\left[\int dz - \int \frac{dz}{z^3}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{2z^2}\right) + C = C - \frac{2z^3+1}{8z^2} = C - \frac{4x^{-3}+3}{8(2x^{-3}+1)^{2/3}} \\
&= C - \frac{4+3x^3}{8x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}\ ,
\end{aligned}$$

y otra vez se necesita, más que ser un experto con integrales, cierta habilidad con los exponentes y los cambios de variable, especialmente a la hora de devolverlos.

♢

147. En casi todas las ramas de las Ciencias e Ingeniería, se usan integrales notables con bastante frecuencia; la suficiente como para que uno quiera poder resolverlas. Hasta ahora, la gran mayoría de las integrales que se han propuesto a lo largo de esta guía han sido resolubles, y el lector poría pensar que esto implica necesariamente que **todas** las integrales (indefinidas o nó) se deben poder resolver en términos algebráicos. Pero casi nunca es este el caso, como sucede con

$$I_1 = \int e^{-x^2}\,dx\ ,\quad I_2 = \int \frac{e^x}{x}\ ,\quad I_3 = \int \operatorname{sen} x^2\,dx\ ,\quad I_4 = \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\ ,$$

llamadas *de Cauchy*, *exponencial integral*, *de Fresnel* y *seno integral*. Con estas integrales y usando cambios de variable y/o métodos de integración, demostrar que las siguientes **no son integrables**:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{e^{x}}{x^2+x-2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{lgn} x}$ (e) $\displaystyle\int x\,e^{2x-x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int x\,e^{-x^2}\operatorname{lgn} x\,dx$ (g) $\displaystyle\int \operatorname{lgn}\operatorname{lgn} x\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{e^{x}-\operatorname{sen} x}{(x-\pi)^2}\,dx$

148. Supongamos que se conoce el valor numérico de la integral $A=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+1}$ (la cual, por lo que vimos en la pregunta anterior, no se puede calcular en términos de funciones elementales). Expresar los valores de las siguientes integrales en términos de A:

(a) $I_1=\displaystyle\int_{a-1}^{a} \frac{e^{-t}}{t-a-1}\,dt$ (b) $I_2=\displaystyle\int_0^1 \frac{t\,e^{t^2}}{t^2+1}\,dt$ (c) $I_3=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{(t+1)^2}\,dt$ (d) $I_4=\displaystyle\int_0^1 e^t\operatorname{lgn}(t+1)\,dt$

149. Finalmente, resolver por cualquier método anteriormente visto, las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{3.2^x-2.3^x}{6^x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int (x-1)^2\cosh 2x\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$

(f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn} x}{x(1-\operatorname{lgn}^2 x)}\,dx$

(g) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-6e^x+13}\,dx$

(k) $\displaystyle\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{\operatorname{arcsen} a} \frac{a\operatorname{sen} x+\cos x}{a^2+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{lgn}\operatorname{sen} x}\,dx$

(o) $\displaystyle\int e^{2x^2+\operatorname{lgn} x}\,dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{1+\tan x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx$

(q) $\displaystyle\int a^{mx}b^{nx}\,dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$

(s) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$

(t) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

(u) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x}$

(w) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx$

(x) $\displaystyle\int \cos^2\operatorname{lgn} x\,dx$

(y) Hallar la relacion $\dfrac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{x^2\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{x\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx}$ (*Sugerencia*: no intente calcular la integral del denominador; en la del numerador haga el cambio $x=2\pi-u$).

(z) Dada $I=\displaystyle\int (ax^2+b)\left(\frac{\arctan x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2-1}\operatorname{lgn}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)dx$,

i. hallar las condiciones sobre a y b para que I sea resoluble *sin* integración por partes;

ii. resolver I cuando $b=-a$.

(α) Demostrar que $\displaystyle\int \frac{\alpha\cos x+\beta\operatorname{sen} x+\gamma}{(1-\delta\cos x)^2}\,dx$ es una función racional (o sea, sin logaritmos) de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ si y sólo si $\alpha\delta+\gamma=0$. Con esta condición, resolver esta integral. (*Sugerencia*: haga $u=\tan(x/2)$.)

(β) Si $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, demostrar que $f(a)+f(b)=f\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$.

(γ) Demostrar que la integral $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d}\right)dx$ puede ser reducida a la integral de una función racional usando el cambio de variable $4x=-\dfrac{b}{a}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-\dfrac{d}{c}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^2$.

(δ) Usando integración por partes, demostrar que si $I_{m,n}=\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n$ (siendo $m,n\in\mathbf{N}$), entonces es válida la relación $(m+n+1)I_{m,n}=nI_{m,n-1}$, y deducir que $I_{m,n}=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

150. Marcar sólo una de las alternativas en las siguientes preguntas:

(I) ¿Cuál es el valor de $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$?

a. 1 b. -1 c. $\sqrt{2}$ d. $1/\sqrt{2}$ e. $1/2\sqrt{2}$

(II) El valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\, \mathrm{e}^{-x^3}\, dx$ es:

a. $-\dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-1}$ b. $\dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{3\mathrm{e}}$ c. $\dfrac{\mathrm{e}-1}{3\mathrm{e}}$ d. $-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}$ e. $\dfrac{3x^2}{\mathrm{e}}$

(III) El valor de $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x\, dx$ es:

a. $\pi - 1$ b. $\pi - 2$ c. $\dfrac{3\pi}{2}$ d. $\dfrac{\pi}{2}$ e. π

(IV) El valor de $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\operatorname{lgn} x}}$ es:

a. e^3 b. $\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}$ c. $\mathrm{e}^2 - 1$ d. 2 e. 1

(V) Una solución de la integral $\displaystyle\int \frac{x}{\mathrm{e}^x}\, dx$ es:

a. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ b. $\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x}$ c. $\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$ d. $\mathrm{e}^x + 1$ e. $-\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$

(VI) El valor de $\displaystyle\int \frac{dx}{\csc 2x - \operatorname{ctg} 2x}$ es:

a. $\frac{1}{2} \operatorname{lgn} |\cos x| + C$ c. $2 \operatorname{lgn} |\operatorname{sen} x| + C$ e. $\operatorname{lgn} |\csc x - \operatorname{ctg} x| + C$
b. $\frac{1}{2} \operatorname{lgn}(2\cos^2 x) + C$ d. $\operatorname{lgn} |\operatorname{sen} x| + C$

(VII) Al descomponer la función racional $\dfrac{2x^3 - x^2 + 4x + 1}{x^4 + x^2 - 2}$ en fracciones parciales, se obtiene:

a. $\dfrac{x}{x^2+2} + \dfrac{2x}{x^2-2}$ c. $\dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2+2}$ e. $-\dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2-2}$
b. $\dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{x}{x^2-2}$ d. $\dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{2x}{x^2+2}$

(VIII) Al descomponer $f(x) = \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{(x^2 - x)^2}$ en fracciones simples se obtiene:

a. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ c. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ e. $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$
b. $-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$ d. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

(IX) El valor de $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{4x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{(x^2-x)^2}\, dx$ es:

a. $\dfrac{5}{3} + \operatorname{lgn} 12$ b. $\dfrac{13}{3} + \operatorname{lgn} 12$ c. $\dfrac{5}{3} + \operatorname{lgn} 22$ d. $\dfrac{5}{3} + \operatorname{lgn} 48$ e. $\dfrac{3}{5} + \operatorname{lgn} 12$

(X) Una primitiva de la función racional $f(x) = \dfrac{2x^3}{(x^2+1)^2}$ es:

a. $\operatorname{lgn}(x^2+1) + \dfrac{1}{x^2+1} + C$ c. $\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right| + C$ e. $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right| + C$
b. $\operatorname{lgn}(x^2-1) + \dfrac{1}{x^2+1} + C$ d. $\dfrac{(x^2+1)^2+1}{x^2+1} + C$

(XI) Para calcular $\displaystyle\int_{0}^{a} (a^2 - x^2)^n\, dx$ (n número natural) se descompone en dos integrales usando

$$(a^2 - x^2)^n = (a^2 - x^2)^{n-1}(a^2 - x^2) = a^2(a^2 - x^2)^{n-1} - x^2(a^2 - x^2)^{n-1}\ .$$

Integrando la segunda integral obtenida, por partes, se obtiene la ley de recurrencia:

a. $I_n = a\dfrac{2n+1}{n-1}I_{n-1}$ c. $I_n = a^2\dfrac{n+a}{2n+1}I_{n-1} + aI_{n-2}$ e. $I_n = a^2\dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$

b. $I_n = a^2\dfrac{n+1}{2n+1}I_{n-1}$ d. $I_n = naI_{n-1} + \dfrac{n}{2n+1}I_{n-2}$

(XII) Si $n \neq -1$, una primitiva de $f(x) = x^n \operatorname{lgn} ax$ es:

a. $\dfrac{x^2}{n}\operatorname{lgn} ax - \dfrac{x^{n+1}}{a^2(n+1)}$ c. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{lgn} ax - \dfrac{x^{n+1}}{a^2(n+1)^2}$ e. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{lgn} ax - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

b. $\dfrac{x^2}{n}\operatorname{lgn} ax - \dfrac{x^{n+1}}{a(n+1)}$ d. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{lgn} ax - \dfrac{x^{n+1}}{a(n+1)^2}$

(XIII) Si $\displaystyle\int x^n \cos x\, dx = x^n \operatorname{sen} x - \int M(n,x)\, dx$, entonces $M(n,x)$ es igual a:

a. $x^{n-2}\cos x$ b. $nx^{n-1}\operatorname{sen} x$ c. $x^n \operatorname{sen} x$ d. $x^{n-1}\cos x$ e. $nx^{n-1}\cos x$

(XIV) Una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ es:

a. $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x^2+1}{x-1}\right|$ c. $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + \dfrac{x^2}{1+x^2}\right)$ e. $\dfrac{1}{2}\left(\arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}\right)$

b. $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x-1}{x^2+1}\right|$ d. $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arcctg} x - \dfrac{x}{1+x^2}\right)$

(XV) Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + \cos x - 2}$ es:

a. $\dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}\dfrac{3-\cos x}{\cos x+1}$ c. $\dfrac{1}{3}\operatorname{lgn}\dfrac{2+\cos x}{\cos x-1}$ e. $\dfrac{1}{3}\operatorname{lgn}\dfrac{2-\cos x}{\cos x+1}$

b. $\dfrac{2}{3}\operatorname{lgn}\dfrac{2-\cos x}{\cos x+3}$ d. $\dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}\dfrac{3+\cos x}{\cos x+1}$

(XVI) Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$ es:

a. $\tan\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+C$ c. $\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-1}\right|+C$ e. $\operatorname{lgn}\left|\tan\dfrac{x}{2}+1\right|+C$

b. $\tan\left(\dfrac{x}{2}+1\right)+C$ d. $\operatorname{lgn}\left|\tan\dfrac{x}{2}-1\right|+C$

(XVII) Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x+2)\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ es:

a. $\mathrm{e}^x - \operatorname{lgn}(\mathrm{e}^x+1)+C$ c. $\mathrm{e}^x+1+\operatorname{lgn}\mathrm{e}^x+C$ e. $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\mathrm{e}^x+2}{\mathrm{e}^x+1}\right|+C$

b. $\mathrm{e}^x + \operatorname{lgn}(\mathrm{e}^x+1)+C$ d. $\mathrm{e}^x(\operatorname{lgn}\mathrm{e}^x - \operatorname{lgn} 2)+C$

(XVIII) Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ es:

a. $\dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}\left|\sqrt{x+2}-2\right|+C$ c. $\dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{\sqrt{x-2}+2}\right|+C$ d. $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right|+C$

b. $\dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}-2}\right|+C$ e. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}+C$

8 Integrales Impropias

Como último tópico del Cálculo Integral, exponemos integrales impropias.

No siempre es cierto que las integrales de la forma $\int_a^\infty f(x)\,dx$ o $\int_a^b g(x)\,dx$ si f es continua en $[a,\infty)$ y g no es continua en $c\in[a,b]$, existen o se pueden calcular. En cualquier caso, adoptaremos la definiciones

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx\ ,\quad \int_a^b g(x)\,dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t g(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b g(x)\,dx\ ,$$

y las integrales del miembro izquierdo de cada ecuación se dirán *convergentes* si los límites del miembro derecho existen (es decir, son finitos). En caso contrario, se dirán *divergentes*.

Comencemos con integrales infinitas.

150. Analizar la convergencia de las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\operatorname{lgn} x}{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty x\,e^{-x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty x^3\,e^{-x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(i) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$ (j) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$ (k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\operatorname{lgn} x}{(1+x^2)^2}\,dx$ (l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}\,dx$

♢ *Solución*: Miremos la solución del (e) y del (i).

(e) Notando primero que $x^3 = x\cdot x^2$, y haciendo el cambio $u=x^2$ (junto con los límites de integración), tenemos que la integral resultante es por partes:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^3\,e^{-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2\,e^{-x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u\,e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\left(-u\,e^{-u}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,du\right)\\ &\overset{*}{=} \frac{1}{2}\left(0\,e^0 - \lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b} - e^{-u}\Big]_0^\infty\right) \overset{**}{=} \frac{1}{2}\left(-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} + 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b}\right) = \frac{1}{2}(0+1+0)\\ &= \frac{1}{2}\ ,\end{aligned}$$

por lo que la integral es convergente (al valor 1/2). En el paso (*) es necesario escribir $b\,e^{-b}$ como un cociente, ya que tiene la forma indeterminada $0\cdot\infty$, para poder aplicar la regla de L'Hôpital en el paso (**).

(i) Se reconoce como una integral de fracciones simples, pero los trucos de sumar y restar lograrán una resolución más rápida:

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2} &= \frac{1}{3}\int_2^\infty \frac{3}{(x+2)(x-1)}\,dx = \frac{1}{3}\int_2^\infty \frac{x+2+1-x}{(x+2)(x-1)}\,dx = \frac{1}{3}\int_2^\infty\left(\frac{dx}{x-1} - \frac{dx}{x+2}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\operatorname{lgn}|x-1|\big]_2^\infty - \operatorname{lgn}|x+2|\big]_2^\infty\right) = \frac{1}{3}\left(\lim_{b\to\infty}\operatorname{lgn}\left|\frac{b-1}{b+2}\right| - \operatorname{lgn}\frac{2-1}{2+2}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\operatorname{lgn}\left(\lim_{b\to\infty}\frac{b-1}{b+2}\right) - \operatorname{lgn}\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\operatorname{lgn}1 - \operatorname{lgn}\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\operatorname{lgn}4\ .\end{aligned}$$

En este caso, escribir la resta de logaritmos como el logaritmo del cociente no es un lujo de simplificación, sino una necesidad, ya que de otro modo se hubiera presentado la indeterminación $\operatorname{lgn}\infty - \operatorname{lgn}\infty$, la cual hay que calcularla como $\operatorname{lgn}(\infty/\infty)$ (claro está, usando la continuidad del logaritmo), resultando convergente esta integral.

♢

151. Usar fórmulas de reducción para analizar la convergencia de la integrales

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x^n\,e^{-x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh^{n+1} x}$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)}$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+2x+2)^n}$

152. Se define la *transformada de Laplace* de una función f integrable como $\mathcal{L}_s(f(x)) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx} f(x)\,dx$.

(a) Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Laplace

i. $\mathcal{L}_s(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\mathcal{L}_s(f(x)) + \beta\mathcal{L}_s(g(x))$

ii. $\mathcal{L}_s\left(\dfrac{d}{dx}f(x)\right) = s\mathcal{L}_s(f(x)) - f(0)$

iii. $\mathcal{L}_s(\mathrm{e}^{ax} f(x)) = \mathcal{L}_{s+a}(f(x))$

iv. $\mathcal{L}_s(f(at)) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}_{s/a}(f(x))$

(b) Hallar las tranformadas de las siguientes funciones:

i. $\mathcal{L}_s(\mathrm{e}^{ax})$ ii. $\mathcal{L}_s(\operatorname{sen} ax)$ iii. $\mathcal{L}_s(\cosh ax)$ iv. $\mathcal{L}_s(x^n)$

153. Hallar el área acotada entre la gráfica de $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ y su asíntota.

154. Calcular el límite $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,dt}$.

155. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, usando el cambio de variable $x + 1/x = u$.

$\diamondsuit$ *Solución*: Este cambio obliga a que $(1 - 1/x^2)\,dx = du$ y $x^2 + 1/x^2 + = (x + 1/x)^2 - 2 = u^2 - 2$. Además, los límites cambian de 1 a 2 y de 0 a ∞. Como la integral pedida se puede escribir en función de $x + 1/x$, el cambio funciona, y tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \int_0^1 \frac{1/x^2-1}{1/x+x}\frac{dx}{\sqrt{1/x^2+x^2}} = \int_\infty^2 \frac{-du}{u\sqrt{u^2-2}} = \int_2^\infty \frac{u}{u^2\sqrt{u^2-2}}\,du \\
&\overset{*}{=} \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{t}{(t^2+2)t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\bigg]_{\sqrt{2}}^\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{b\to\infty}\arctan\frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\,,
\end{aligned}$$

donde en el paso (*) usamos el cambio de variable $t^2 = u^2 - 2$. $\diamondsuit$

156. Sea $B = \{\, x \in (0,\infty) \mid \operatorname{sen} x > 0 \,\}$. Usando integración por partes, hallar el valor de $\displaystyle\int_B \mathrm{e}^{-x/2}\frac{|\operatorname{sen} x - \cos x|}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$.

157. Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \mathrm{e}^{-1}$ (*Sugerencia*: llamar L al límite y aplicar logaritmos a ambos miembros; resultará la suma de Riemann correspondiente a $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{lgn} x\,dx$).

158. Sea f continua en $[x_0,\infty)$ tal que $|f'(x)| < M$ para todo $x \geq x_0$ y tal que $\displaystyle\int_{x_0}^\infty |f(x)|\,dx$ es convergente. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (*Sugerencia*: examinar la integral $\displaystyle\int_{x_0}^\infty f(x)f'(x)\,dx$).

159. Hallar los valores de m, n, k para que las siguientes integrales sean convergentes

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^k \operatorname{lgn} x}$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m}{1+x^n}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{mx+nx^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\operatorname{lgn} x)^k}$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{k}{x+2} - \frac{4x}{3x^2+2}\right)$ (f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2-1}{x^{n+1}-x^n}\,dx$

160. Este ejercicio es parecido al §147; sean $a, b > 0$ y $n \in \mathbf{N}$. Suponer válidos los resultados

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ , \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ ,$$

para demostrar que las siguientes integrales son convergentes y hallar su valor:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}\,e^{-x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos^3 x}{x-\pi/2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2\,e^{2bx-x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax\cos bx}{x}dx$ (i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx$

Para terminar la guía, los restantes ejercicios se refieren a integrales impropias con discontinuidades en el intervalo de integración. Se advierte que las integrales presentadas en este punto pueden ser infinitas, además de impropias de discontinuidad, sólo para aprovechar un repaso del punto anterior.

161. Analizar la convergencia de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{lgn} x\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2-\sqrt{1-x^2}}$ (g) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\operatorname{lgn}^2 x}$ (j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\operatorname{lgn}\cos x\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{lgn}(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^3}{x^4}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(x-1)}{(x-1)^{4/3}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$ (i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$ (l) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(x^2-2)\,dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

162. Demostrar que existe $x\in(e^{-1},1)$ tal que $\displaystyle\int_0^x \operatorname{lgn} x\,dx = \operatorname{lgn}\left(\int_0^x x\,dx\right)$ (*Sugerencia*: teorema de Bolzano).

163. Calcular la integral $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$ por medio del cambio $x-1/x=t$.

164. Demostrar que la *función gamma* definida como $\Gamma(p)=\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-x}\,dx$ es convergente cuando $p>0$. Comprobar además que cuando $p=n\in\mathbf{N}$, se tiene $\Gamma(n)=(n-1)!$ (*Sugerencia*: si ya hizo el ejercicio §139z, úselo aquí).

165. En este ejercicio se pretende dar una poderosa herramienta para verificar la convergencia o divergencia (más no para calcular) de integrales infinitas, llamada *criterio de convergencia*:

Teorema 8.2. Sean f,g integrables en el intervalo $[a,\infty)$ tales que $f(x)\le g(x)$ para todo $x\in[a,\infty)$. Entonces:

(a) si $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge, $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge;

(b) si $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverge, $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ diverge.

Usando este teorema, determinar el carácter de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{e^2}^\infty \frac{dx}{x\operatorname{lgn}\operatorname{lgn} x}$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{lgn}\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{13}\,dx}{(x^5+x^3+1)^3}$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\operatorname{sen}\pi x}-1}\,dx$

166. Marcar la alternativa correcta en cada una de las siguientes preguntas:

(I) El valor de $\displaystyle\int_1^0 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ es:

a. 0 b. $\pi/4$ c. $\pi/2$ d. $-\pi/4$ e. No existe

(II) Sean $I_1=\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2}$ e $I_2=\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$. Entonces se puede afirmar que:

a. I_1 e I_2 convergen
c. I_1 diverge e I_2 converge a 0
e. I_1 e I_2 divergen a ∞
b. $I_1 = 1$, $I_2 \to \infty$
d. I_1 converge a 0 e I_2 diverge

(III) Sean $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{lgn} \operatorname{sen} x\, dx$ y $J = \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{lgn} \operatorname{sen} x\, dx$. Mediante la sustitución $x = \pi - u$ se obtiene:

a. $I = \pi J$ b. $I = 2J$ c. $I < J$ d. $I = J$ e. $2I = J$

(IV) Sea a tal que $\operatorname{senh} a = 1$. Al evaluar la integral $K = \int_0^a \frac{\operatorname{senh}^2 x \cosh x}{\sqrt{1 - \operatorname{senh}^2 x}}\, dx$ se obtiene que:

a. $K = -\pi$ b. $K = \pi/4$ c. $K = \pi/2$ d. $K = 1/2$ e. No existe

(V) La integral $\int_1^{\infty} \frac{1 + \cos x}{x^4}\, dx$:

a. Converge a 2
c. Diverge
e. Converge a $\leq 1/2$
b. Converge a un número $\leq 2/3$
d. Converge a un número ≤ 1

(VI) Sea f continua en $[0, \infty)$ tal que $0 \leq f(x) \leq \pi$ para todo x en dicho intervalo. Entonces la integral $\int_0^{\infty} \frac{f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}}\, dx$:

a. Diverge a ∞
b. Converge a π
c. Converge a un número $\leq \pi/2$
d. Converge a e^2
e. Converge a un número $\leq 1/2$

9 Respuestas a ejercicios selectos

(1.a) $\sum_{k=1}^{10} k^2$ (1.b) $\sum_{k=1}^{11} \frac{(-1)^k k}{k+1}$ (1.c) $\sum_{p \text{ primos}} a_p$ (1.d) $\sum_{k=1}^{10} k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ (1.e) $\sum_{k=0}^{8} \cos^{(-1)^k}\left(x + \frac{\pi}{2^k}\right)$

(1.f) $\sum_{k=0}^{10} \sqrt[2k+1]{\frac{a^{f(k)} + \operatorname{sen}(k\pi/2)}{k!}}$, donde $f(k) = k^{(-1)^k}$ (2.b) $\frac{76}{105}$ (2.d) $a_{n+1} - a_1$ (2.e) $2\sum_{k=1}^{60} k^2 = 147.620$

(2.f) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (3.a) 20 (3.b) $\frac{20}{21}$ (3.c) $11 - 3\sqrt{11} - \sqrt{2}$ (3.d) $24.07 \approx 2\left(\sqrt{170} - 1\right) < \sum_{k=1}^{169} \frac{1}{\sqrt{k}} < 26$

(5.c.vi) Para $n = 1$ es cierta, ya que $\forall\, x$ se cumple $1 + x = 1 + x$. Además:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \overset{hip}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x\ , \quad \forall\, x \geq 0\ .$$

(8) (a,c,e) No; (b,d,f) Si. (12) (a,d) No; (b,c) Si. (13.e) No. (14.a) $v_0 T + g\frac{T^2}{2}$ (14.b) $\frac{n(n-1)}{2}$ (14.c) $\frac{3}{4}$ (14.d) 1

(14.e) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ (14.f) $2\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)$ (16.a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$ (16.b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}$, $p \neq -1$

(16.c) $\int_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3}$ (16.d) $\int_0^1 \operatorname{sen} \pi x\, dx = \frac{2}{\pi}$ (16.e) $\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1\right)$ (16.f) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ (16.f) $\int_0^5 \frac{dx}{1+x}$

(20.a) $I_1 = \frac{1}{4} \arcsen \frac{1}{4}$; $I_2 = \frac{\pi}{2}$ (20.b) $I_1 = \frac{\pi}{4}$ (20.c) $I = \frac{\pi^2}{4}$ (20.d) $I = \frac{1}{99} - \frac{1}{50} + \frac{1}{101}$ (20.e) $I = J = \frac{\pi}{4}$ (21.d) $\frac{\pi}{16}$

(21.h) $4\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 2$ (21.l) $\frac{a}{4}$ (21.p) $\frac{7\pi}{12}$ (23.a) $I'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} x^3 - 2x \operatorname{sen} x^2$ (23.b) $I'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2\left(\int_0^x \frac{dt}{\arcsen t}\right)} \frac{1}{\arcsen x}$

(23.c) $I'(x) = 2\left[\tan x |\tan x| \sec^2 x \operatorname{sen}\left(\tan^2 x\right) - x|x| \operatorname{sen} x^2\right]$ (23.d) $y' = \frac{y - 1 - \cos x}{\operatorname{sen} y - 1 - x}$ (23.e) $I'(x) = 2x\cos x + 2\int_0^x \cos t\, dt$

(23.f) 9 (25) $f(x) = \frac{1}{2} \arctan \operatorname{sen} x$ (26) $p(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 3$ (27.b) $k = \frac{3}{2}$ (30.b) $f(x) = 3x^2$, $c = -3^{2/3}$

(30.d) $f(x) = 2x^{15}$, $c = -\frac{1}{9}$ (31.b) $f(2) = \sqrt[3]{24}$ (31.d) $f(2) = \frac{1}{5}$ (32) $f''(1) = 2$, $f'''(1) = 5$ (34.c) $I \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

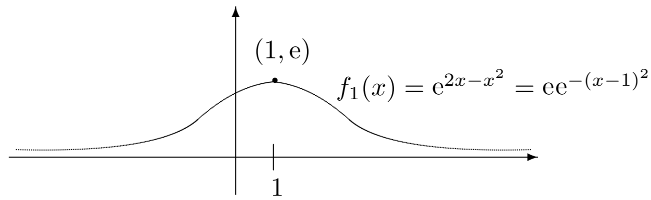
(39) I-a; II-a; III-d; IV-a; V-b; VI-e; VII-c; VIII-c; IX-e; X-c (40.a) $\frac{32}{3}$ (40.b) $\frac{1}{2}$ (40.c) 12

(40.d) $\int_{-10/3}^{1} \left(\frac{10-x}{3} - x^2 - 2x\right) dx - \int_{-3/2}^{0} \left(\frac{x}{2} - x^2 - 2x\right) dx$ (40.e) $\frac{37}{2}$ (40.f) $\frac{5}{2}$ (40.g) $\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}$ (40.h) $\frac{9}{64}$ (40.i) $\frac{37}{12}$

(40.j) $3\sqrt{3}$ (40.k) $5\pi - 3\sqrt{3}$ (40.l) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3} + \dfrac{7}{6}$ (40.m) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$ (40.n) $\dfrac{4a^2}{3}$ (40.o) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{\pi}$ (40.p) $\dfrac{37}{12}$ (41) $c = 2\sqrt[3]{2}$
(42) $A = \left(\int_0^a - \int_a^{a+b}\right) \dfrac{f(x) - g(x)}{2}\,dx - \pi(b-a)^2$ (43.a) $2\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{2}\operatorname{sen}(x + \pi/4)\,dx = 4\sqrt{2}$ (43.b) 0 (43.c) $\dfrac{4}{21}$ (43.d) 64
(45.a) $\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}$ (46.a) $\dfrac{32\pi}{3}$ (46.b) $\dfrac{72\pi}{5}$ (46.c) 54π (46.d) 16π (51) $\dfrac{2}{3}\pi R^2 H$ (56) $\dfrac{4}{3}R^2 H$ (58.d) $\log_3 27 = 3$ (58.g) $3^{-4} = \dfrac{1}{81}$
(59.j) $\dfrac{1}{2}$ (63.d) $x_1 = 16,\ x_2 = \sqrt[4]{2}$ (63.o) $x_1 = 2,\ x_2 = \dfrac{1}{16}$ (64.d) $\pi - \log_2 9 < 1 + \log(1+\sqrt{2})$ (65.a) $x \in [0, 1/2]$
(65.m) $x \in (0, 1/8) \cup (1, 2)$ (67.b) $x \in [1, 2]$ (67.f) $x \in (k\pi, (k + 1/2)\pi),\ k \in \mathbf{Z}$ (67.j) No(68) La fórmula para $f_1(x)$ se puede escribir como

$$f_1(x) = (\mathrm{e}^x)^{2-x} = \mathrm{e}^{2x-x^2} = \mathrm{e}^{1-1+2x-x^2} = \mathrm{e}^1\,\mathrm{e}^{-(1-2x+x^2)} = \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\ ,$$

de modo que su gráfica (la cual se muestra en la figura adjunta) sale de aplicarle las transformaciones $T^H_{(\ )-1}$ y $T^V_{\mathrm{e}(\ )}$ a la campana de Gauss:



(69.e) $\log_a \mathrm{e}$ (70.b) $\dfrac{\alpha - \beta}{a - b}$ (70.f) $a^a(\operatorname{lgn} a - 1)$ (70.l) $\operatorname{lgn}^2 a$ (71.a) $\operatorname{lgn}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (71.g) $\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen} bx$ (72.e) $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x - a_i}$
(80) $a = 4$, $b = -1$ y $c = 1$ (82) -1 (86.b) $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}\tan\frac{1}{2^k} = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{1}{2^n}$ (88.b) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}$ (92.b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^x + 1}$
(98) $a = \mathrm{e}$ (100) $(f^{-1})'(\mathrm{e}) = \dfrac{x_0}{\operatorname{sen}\operatorname{lgn}^2 x_0},\ x_0 = f^{-1}(\mathrm{e})$ (101) $f(x) = \begin{cases} x & ,\ x \in (-\infty, 0] \\ \mathrm{e}^x - 1 & ,\ x \in (0, \infty) \end{cases}$ (102.d) $\arctan \mathrm{e}^x$
(102.f) $\mathrm{e}^x + \operatorname{lgn}(1 + \mathrm{e}^x)$ (102.j) $\dfrac{\arctan x^2}{2} - \dfrac{\operatorname{lgn}(1+x^4)}{4}$ (102.q) $\mathrm{e}^{\arctan x} + \dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}^2(1+x^2) + \arctan x$ (102.t) $\operatorname{lgn}(n!)$
(104) $\dfrac{160\pi}{9\operatorname{lgn} 3}$ (105) $\dfrac{\mathrm{e}}{2\pi}$ (111) $-\dfrac{1}{4}$ (112.b) $\dfrac{2}{9}$ (112.e) No existe (113.b) $\mathrm{e}^{ax}\operatorname{senh} x$ (113.e) $-\operatorname{csch}^2 x$ (115.b) $-\dfrac{1}{3\cosh^3 x} + C$
(115.d) $\operatorname{lgn}|x + \operatorname{senh} x\cosh x| + C$ (116.a) $\pi\left(\dfrac{\operatorname{lgn} 2}{2} + \dfrac{63}{32}\right)$ (117) I-c; II-a; III-c; IV-d; V-b; VI-a (118.b) $\operatorname{lgn}|x| - \dfrac{1}{4x^4}$
(118.f) $\operatorname{lgn}(x^2+9) - \dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{x}{3}$ (118.i) $-\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\cos(x^2+1)$ (118.m) $\dfrac{1}{8}\operatorname{lgn}(1+4x^2) - \dfrac{1}{3}\sqrt{\arctan^3 2x}$
(118.t) $\dfrac{1}{99(1-x)^{99}} - \dfrac{1}{49(1-x)^{98}} + \dfrac{1}{97(1-x)^{97}}$ (118.v) $-\dfrac{1}{2\,\mathrm{e}^x(\cos x + \operatorname{sen} x)}$ (118.y) $\dfrac{\pi}{2}x$
(119.a) $-2\left(\sqrt[4]{5-x} - 1\right)^2 - 4\operatorname{lgn}\left(1 + \sqrt[4]{5-x}\right)$

$$\text{(119.c)}\ \frac{6x\sqrt[6]{x}}{7} - \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3\operatorname{lgn}\left|1 + \sqrt[3]{x}\right| + 6\arctan\sqrt[6]{x}$$

(119.e) $\dfrac{1}{3}\operatorname{lgn}\dfrac{(z-1)^2}{z^2+z+1} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2z+1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2z}{z^3-1}$, donde $z = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (119.f) $-\dfrac{4\sqrt[4]{x}+2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$ (120.a) $\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x+1}{2}$
(120.b) $\dfrac{3}{2}\operatorname{lgn}(x^2-4x+5) + 4\arctan(x-2)$ (120.c) $x - \dfrac{5}{2}\operatorname{lgn}(x^2+3x+4) + \dfrac{9}{\sqrt{7}}\arctan\dfrac{2x+3}{\sqrt{7}}$
(120.e) $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2-1+\sqrt{2}}\right|$ (120.f) $\dfrac{1}{9}\operatorname{lgn}\left[\left|x^3+1\right|\left(x^3-2\right)^2\right]$
(120.g) $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\left(x^2 - 2x\cos\alpha + 1\right) + \operatorname{ctg}\alpha\arctan\dfrac{x - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ (120.l) $-2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsen\dfrac{2x+1}{\sqrt{5}}$
(120.m) $\dfrac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1} + \dfrac{1}{2}\left|x^2 - 1 + \sqrt{x^4-2x^2-1}\right|$ (120.n) $-\dfrac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4} + \dfrac{3}{4}\arcsen\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{5}}$
(120.p) $-\operatorname{lgn}\left(2 + \cos x + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}\right)$ (120.q) $-\sqrt{1 - 4\operatorname{lgn} x - \operatorname{lgn}^2 x} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\arcsen\dfrac{2 + \operatorname{lgn} x}{\sqrt{5}}$
(121.b) $\dfrac{1}{6}\operatorname{lgn}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{|x+2|} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\arcsen\dfrac{x+5}{\sqrt{2}(x+2)}$ (121.d) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{lgn}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{|x-1|}\right)$
(122.b) $-\dfrac{8+4x^2-3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}$ (122.f) $\left(\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{14}{3}x + 37\right)\sqrt{x^2+4x+3} - 66\operatorname{lgn}\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+3}\right|$
(123.c) $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}^2\tan x$ (123.f) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{lgn}|(\sec x + \tan x)(\csc x - \operatorname{ctg} x)|$ (123.j) $-\operatorname{ctg} x - \dfrac{2\sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}}{3}$

(124.l) $-\dfrac{3x^2}{2}-3x-\dfrac{\operatorname{sen}(2x^2+4x)}{2}-\dfrac{\operatorname{sen}(4x^2+8x)}{8}-\dfrac{\operatorname{ctg}(2x^2+4x)}{2}-\dfrac{\csc(2x^2+4x)}{2}$ (125.f) $\operatorname{lgn}|\tan x|-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x$

(125.m) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\tan^5 x}+\dfrac{3}{11}\sqrt[3]{\tan^{11} x}$ (126.a) $-\dfrac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\dfrac{9}{2}\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{3}$ (126.b) $-\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$ (126.f) $\begin{cases} 2\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+C_1 \\ \operatorname{arcsen}(2x-1)+C_2 \end{cases}$

(126.k) $\dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$ (126.n) $\dfrac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\dfrac{11}{8}\operatorname{arcsen}\dfrac{1-2x}{\sqrt{5}}$

(127.c) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{\operatorname{sen}2ax}{8a}+\dfrac{\operatorname{sen}2bx}{8b}+\dfrac{\operatorname{sen}2(a-b)x}{16(a-b)}+\dfrac{\operatorname{sen}2(a+b)x}{16(a+b)}$ (128.c) $-x+\tan x+\sec x$ (128.e) $\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\tan(x/2)-5}{\tan(x/2)-3}\right|$

(128.f) $\arctan\left(1+\tan\dfrac{x}{2}\right)$ (128.h) $-x+2\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\tan(x/2)}{\tan(x/2)+1}\right|$ (128.i) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{lgn}\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{b}{a}\right)\right|$

(129.a) $-\dfrac{x}{5}-\dfrac{3}{5}\operatorname{lgn}|\operatorname{sen}x+2\cos x|$ (129.b) $\dfrac{x}{10}+\dfrac{3}{10}\operatorname{lgn}|\operatorname{sen}x-3\cos x|$ (129.f) $\dfrac{3x}{34}+\dfrac{5}{34}\operatorname{lgn}|5\operatorname{sen}x+3\cos x|$

(129.a) $-\dfrac{3x}{5}+\dfrac{4}{5}\operatorname{lgn}|\operatorname{sen}x-2\cos x+3|-\dfrac{6}{5}\arctan\dfrac{5\tan(x/2)+1}{2}$ (130.b) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)-\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}|\sqrt{2}+\operatorname{sen}x+\cos x|$

(131) No. (132.c) $\dfrac{1}{2}(\tan x\sec x-\operatorname{lgn}|\sec x+\tan x|)$ (134) $I=\dfrac{e^x}{2}[x(\operatorname{sen}x-\cos x)+\cos x]$

(135.c) $\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}-3x\right)\operatorname{lgn}^2 x-\left(\dfrac{x^3}{6}-x^2-3x\right)\operatorname{lgn}x+\dfrac{x^4}{96}-\dfrac{x^3}{9}-\dfrac{3x^2}{2}$

(137.b) $x(\operatorname{lgn}x-1)\operatorname{lgn}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{x^2+1}(2-\operatorname{lgn}|x|)+\operatorname{lgn}\dfrac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}$ (138.b) $(x^2+2)\,e^x$

(138.e) $e^{ax}\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a\cos 2bx+2b\operatorname{sen}2bx}{2(a^2+4b^2)}\right)$ (138.h) $\dfrac{(x^2+4)^4}{32}\left(4\operatorname{lgn}(x^2+4)-1\right)$

(139.b) $\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{4}x^2+3x^2\cos x-x(6\operatorname{sen}x+\dfrac{3}{4}\operatorname{sen}2x)-(5\cos x+\dfrac{3}{8}\cos 2x)-\dfrac{1}{3}\cos^3 x$ (139.d) $(1+x)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}$

(139.g) $x\operatorname{arcsen}^2 x+2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}x-2x$ (139.m) $-\dfrac{\operatorname{lgn}^2 x+2\operatorname{lgn}x+2}{x}$ (139.p) $\dfrac{x}{2}(\operatorname{sen}\operatorname{lgn}x-\cos\operatorname{lgn}x)$

(139.q) $x\operatorname{lgn}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen}x$ (139.r) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}2x-e^x(\cos x+\operatorname{sen}x)+\dfrac{1}{2}e^{2x}$

(140.c.iii) $\dfrac{x^2-2}{2}\arctan(2x+3)+\quad+\dfrac{3}{8}\operatorname{lgn}(2x^2+6x+5)$ (140.c.v) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$ (142.a) $\dfrac{x\operatorname{sen}x+\cos x}{x\cos x-\operatorname{sen}x}$

(142.c) $\dfrac{e^x}{x+1}$ (142.e) $e^{\operatorname{sen}x}(x-\sec x)$ (143.g) $e^{2x}\dfrac{4x^3-6x^2+6x-3}{8}$ (144) $4\pi\dfrac{\pi+6-3\sqrt{3}}{6}$ (145.d) $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\dfrac{(x+2)^4}{|(x+1)(x+3)^3|}$

(145.i) $\operatorname{lgn}|x|-\dfrac{2}{7}\operatorname{lgn}|1+x^7|$ (145.k) $4\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|-\dfrac{5x-6}{x^2-3x+2}$ (145.m) $\dfrac{x^2+1}{x}+\operatorname{lgn}\dfrac{(x-1)^2}{|x|}$

(145.t) $\dfrac{1}{8}\operatorname{lgn}\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}-\dfrac{\arctan x^2}{4}$ (145.ϵ) $-\dfrac{1}{10}\left[\dfrac{x^5+2}{x^{10}+2x^5+2}+\arctan(x^5+1)\right]$

(145.θ) $I_3=\arctan x+\dfrac{2x-1}{2x^2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}(1+x^2)$ (145.μ) $\dfrac{3}{8}\arctan x-\dfrac{3}{16}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{x}{4(x^4-1)}$

(145.π) $\dfrac{-3+5x^2-15x^4}{15x^5}-\arctan x$ (146.h) $\dfrac{1}{ab}\arctan\dfrac{a\tan x}{b}$ (146.l) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (146.p) $\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$

(146.r) $\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$ (148.b) $I_2=\dfrac{A}{2}$ (148.d) $I_4=e\operatorname{lgn}2-A$

"Lo que que tenemos que aprender a hacer, lo aprendemos haciéndolo"
Aristóteles, *Ethica Nicomachea* II (s. 325 A.C.)

Typseted in LaTeX.